

# Capacité de Diffusion avec Codage Réseau dans les Grilles Toriques<sup>†</sup>

Antonia Maria Masucci<sup>1</sup> and Cédric Adjih<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Hipercom2 Team, Inria Paris-Rocquencourt, Le Chesnay Cedex, France

---

Dans ce travail, nous étudions les performances du codage réseau pour les réseaux sans fil multi-sauts dans le cas de la diffusion : une source transmet des informations (paquets) à tous les noeuds du réseau. La communication sans fil est modélisée comme un hyper-graphe, i.e. la même transmission d'un noeud atteint simultanément plusieurs de ses voisins. Nous analysons le cas particulier où les noeuds sont organisés dans une grille torique. Nous prouvons un résultat sur la capacité de diffusion du codage réseau sans-fil sur cette topologie, en utilisant des propriétés de la théorie des groupes. Une implication est que le codage réseau est ici “quasi optimal” en termes d'efficacité énergétique, dans le sens où une transmission apporte de nouvelles informations à “quasiment” chaque récepteur.

**Keywords:** réseaux sans fil, codage réseau, diffusion, flot-max/coupe-min.

---

## 1 Introduction

Le codage réseau, proposé par Ahlswede, Cai, Li et Yeung dans [ACLY00], est une méthode qui permet aux noeuds intermédiaires d'un réseau, situés sur les chemins entre sources et récepteurs, de combiner les paquets entrants au lieu de les réexpédier comme dans la stratégie classique de routage. Cette technique offre différents bénéfices pour les réseaux de communication liés au débit, à la sécurité, à la complexité, etc. Dans les réseaux sans fil, le codage réseau a été utilisé à la fois pour le trafic unicast et à la fois pour la multidiffusion. En particulier, dans ce dernier cas l'utilisation du codage réseau, contrairement au routage, permet d'atteindre la capacité maximale [ACLY00]. Dans cet article, nous nous concentrons sur une forme spécifique de multidiffusion, la diffusion, où l'information est envoyée d'une source à tous les noeuds d'un réseau multi-sauts sans fil. Nous analysons le cas où les noeuds sont organisés dans une grille torique et ont un taux de transmission (paquets codés par seconde) identique à l'exception de la source. La *capacité maximale de diffusion de la source* est le débit maximal (paquets par seconde) auquel la source peut injecter des paquets, tout en garantissant que les récepteurs puissent décoder (avec une probabilité tendant vers 1).

Nous trouvons cette capacité dans la topologie considérée lorsque les dimensions de la grille torique sont des nombres premiers<sup>‡</sup> : elle est égale au nombre de voisins d'un noeud. Les ingrédients essentiels de la preuve sont l'écriture du problème sous-jacent de coupe-min sur un hypergraphe, en un problème équivalent de la théorie des nombres (combinatoire additive), et l'utilisation de résultats de ce dernier domaine.

Ceci implique que le codage réseau dans ce type de réseaux est “quasi optimal” en termes d'efficacité énergétique, dans le sens où chaque transmission va apporter de l'information (en dehors du voisinage de la source).

## 2 Modèle du Réseau

Nous étudions le problème de la diffusion d'information d'une source vers tous les noeuds du réseau. En particulier, nous considérons les réseaux sans fil multi-sauts avec un certain nombre de noeuds, sans mobilité, pertes, collisions ou interférences. Deux noeuds sont voisins si leur distance est inférieure à un rayon fixe que nous désignons par  $r$  (entier). Nous notons  $M$  le nombre de voisins d'un noeud,  $C_v$  le taux de retransmission de paquets codés (par seconde) d'un noeud  $v$  et  $\mathcal{N}(v)$  l'ensemble des voisins du noeud  $v$ .

---

<sup>†</sup>Ces travaux ont partiellement été supportés par le financement DGA/ASTRID/ANR-11-ASTR-0033

<sup>‡</sup>. Le cas général serait plus technique car il faut considérer tous les sous-groupes de la grille torique dans la preuve du Théorème 2.

### 3 Codage Réseau : Capacité Maximale de Diffusion

Un point de départ du codage réseau est la référence [ACLY00], montrant que le codage réseau atteint la capacité maximale de diffusion, tandis que dans le cas général, sans codage réseau, elle ne peut être réalisée. Cette capacité est donnée par la coupe minimale à partir de la source vers chaque destination particulière du réseau, où la connectivité est décrite comme un hypergraphe [DEH<sup>+</sup>05].

Prenons la source  $s$  et l'une des destinations de diffusion  $t \in \mathcal{V}$ , où  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des noeuds. Une coupe  $s$ - $t$  est une partition de l'ensemble des noeuds  $\mathcal{V}$  dans deux sous-ensembles  $S$  et  $T$  tels que  $s \in S$  et  $t \in T$ . Soit  $Q(s, t)$  l'ensemble des coupes  $s$ - $t$  :  $(S, T) \in Q(s, t)$ . Soit  $\Delta_S \triangleq \{v \in S | \mathcal{N}(v) \cap T \neq \emptyset\}$ , l'ensemble de noeuds de  $S$  qui sont voisins d'au moins un noeud de  $T$ . La capacité de la coupe  $(S, T)$  est définie comme le taux maximal entre les noeuds de  $S$  et les noeuds de  $T$  :  $C(S) \triangleq \sum_{v \in \Delta_S} C_v$ .

Autrement dit, l'idée est de couper le réseau en deux parties, et vérifier le taux global transmis par les noeuds qui sont dans la partie de la source aux noeuds de l'autre partie. La coupe minimale entre  $s$  et  $t$ , que nous notons  $C_{\min}(s, t)$ , est la coupe appartenant à  $Q(s, t)$  avec la capacité minimale. Quand nous considérons la multidiffusion, il y a plusieurs destinations  $t$  pour la même source  $s$ , donc la coupe minimale est le minimum entre les coupes minimales  $s$ - $t$  pour tout les  $t$ . En cas de diffusion à tous les noeuds, la coupe minimale est le minimum pour tous les noeuds autres que  $s$ , et on la note  $C_{\min}(s)$ , [LRM<sup>+</sup>06],

$$C_{\min}(s, t) \triangleq \min_{(S, T) \in Q(s, t)} C(S) \text{ et } C_{\min}(s) \triangleq \min_{t \in \mathcal{V} \setminus \{s\}} C_{\min}(s, t). \quad (1)$$

### 4 Capacité de Diffusion dans la Grille Torique

Afin de calculer la coupe minimale  $C_{\min}(s)$  dans la topologie considérée, nous considérons un noeud de destination  $t$  dans le réseau. Nous lions la capacité de la coupe entre les noeuds de  $S$  et les noeuds de  $T$  avec le nombre de noeuds de  $S$  qui sont voisins de  $T$ , qui peuvent être écrits avec une somme de Minkowski (somme d'ensembles). Nous utilisons, ensuite, des résultats et arguments de théorie des groupes afin de prouver que cette somme a une cardinalité suffisante (d'où une propriété des grilles toriques).

#### 4.1 Somme de Minkowski (somme d'ensembles) et Voisinage

La somme de Minkowski de  $A$  et  $B$ , deux sous-ensembles d'un groupe, est définie comme l'ensemble de toutes les sommes des paires d'éléments de  $A$  et  $B$ , respectivement :  $A \oplus B \triangleq \{a + b : a \in A, b \in B\}$ .

Nous considérons une grille torique  $G$ , et nous écrivons la grille torique de deux dimensions comme  $G = \frac{\mathbb{Z}}{n_X \mathbb{Z}} \times \frac{\mathbb{Z}}{n_Y \mathbb{Z}}$ , où  $n_X$  et  $n_Y$  sont la largeur et la hauteur de la grille et  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  est l'ensemble des entiers modulo  $n$ . Comme chaque  $\frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$  est un groupe, la somme de Minkowski de sous-ensembles de  $G$  est bien définie. L'ensemble  $R$  voisinage du noeud  $(0, 0)$ , peut être ainsi défini. Soit  $r > 0$  le rayon de couverture radio, nous définissons :

$$R \triangleq \{(x \bmod n_X, y \bmod n_Y) : (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \text{ et } x^2 + y^2 \leq r^2\}. \quad (2)$$

Nous observons que la notion de voisinage est valide pour tous les noeuds car nous considérons une grille torique. Notons que  $R$  est symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire  $(x, y) \in R \implies (-x, -y) \in R$ . En particulier, notons que le nombre  $|R|$  moins 1 représente le nombre de voisins d'un noeud :  $M = |R| - 1$ . Sur la Figure 1, nous avons un exemple de  $R$  avec rayon  $r = 3$  et de somme de Minkowski de  $A$  in (b) et  $R$ .

Pour le résultat que nous prouvons plus tard, nous introduisons dans cet article une notion essentielle de "condition de voisinage large", qui est une propriété d'un groupe, que nous établissons plus tard par  $G$ , et qui est liée au fait que tous les noeuds ont suffisamment de voisins (pas de "bords").

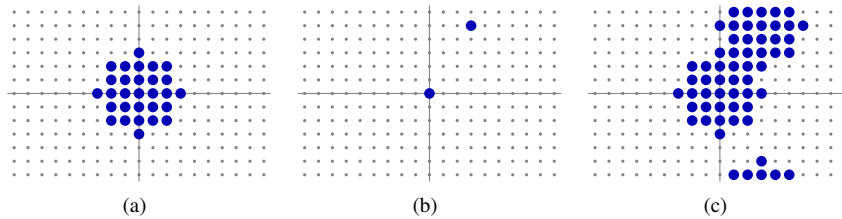


FIGURE 1: (a)  $R$  pour  $r = 3$ ; (b) Ensemble de noeuds  $A$ ; (c) Somme de Minkowski de  $A$  et  $R$ .

**Définition 1** Si pour tous les ensembles  $\emptyset \neq A \subset G$  au moins l'une des conditions suivantes est vérifiée :

$$A \oplus R = G \quad (3)$$

$$\text{ou } |A \oplus R| \geq |A| + |R| - 1 \quad (4)$$

nous disons que  $G$  vérifie la “condition de voisinage large”.

## 4.2 Capacité maximale de diffusion (sous condition de voisinage large)

Nous nous concentrons sur notre résultat central, la capacité maximale de diffusion de la source  $s$ .

**Théorème 1** Considérons un réseau  $G$  qui est une grille torique avec un voisinage défini par un ensemble  $R$ , et avec la sélection de débit suivant :

- taux  $C_v = 1$  pour chaque noeud  $v \neq s$ ,
- taux  $C_s = M = |R| - 1$  pour la source  $s$ .

Si  $G$  vérifie la condition de voisinage large alors la capacité maximale de diffusion est  $|R| - 1$ .

**Preuve :** Considérons une source  $s$  fixe. Dans la section précédente, nous avons dit que le taux (capacité) maximal de diffusion de la source est la coupe minimale  $C_{\min}(s)$ . Nous supposons que la source transmet au taux maximal de diffusion, qui est  $C_s = C_{\min}(s)$ . Considérons maintenant une coupe  $(S, T) \in \mathcal{Q}(s, t)$ . La capacité de cette coupe est  $C(S) \triangleq \sum_{v \in \Delta_S} C_v$  avec  $\Delta_S \triangleq \{v \in S : \mathcal{N}(v) \cap T \neq \emptyset\}$ .

• Cas (i) : Si  $s \in \Delta_S$ , alors  $T$  inclut au moins un noeud qui est voisin de la source. Donc,  $C(S) \geq C_s$ , et cette coupe ne contraint jamais le taux de diffusion maximal (et alors  $C_s = |R| - 1$  implique  $C(S) \geq |R| - 1$ ).

• Cas (ii) : Autrement,  $\Delta_S$  ne comprend que les noeuds différents de la source, donc avec un taux de transmission 1. Donc,  $C(S) = \sum_{v \in \Delta_S} C_v = |\Delta_S|$ . Puisque  $\Delta_S$  représente l'ensemble des noeuds de  $S$  qui sont voisins d'au moins un noeud de  $T$ ,  $\Delta_S$  peut être réécrit comme :  $\Delta_S = \mathcal{N}[T] \setminus T$ , où  $\mathcal{N}[T] \triangleq \mathcal{N}(T) \cup T$  est le “voisinage fermé” de noeuds de  $T$ . Alors :

$$|C(S)| = |\Delta_S| = |\mathcal{N}[T] \setminus T| \stackrel{(a)}{=} |\mathcal{N}[T]| - |T| \stackrel{(b)}{=} |T \oplus R| - |T|$$

où (a) vient de  $T \subset \mathcal{N}[T]$  et (b) de  $\mathcal{N}[T] = T \oplus R$ . L'hypothèse est qu'une des conditions (3) ou (4) est vraie et nous l'utilisons pour  $A = T$ . La condition (3), implique que  $\mathcal{N}[T] = G$ . Cela signifie que la source est voisine de  $T$ , et puisque  $s$  n'est jamais dans  $T$  nous n'avons que  $s \in \Delta_S$ . Mais  $\Delta_S$  ne comprend que les noeuds différents de la source, donc  $T$  ne peut jamais vérifier (3). En conséquence (4) doit être vrai :  $|T \oplus R| \geq |T| + |R| - 1$ . En le combinant avec la dernière expression de  $C(s)$ , nous obtenons  $C(S) \geq |R| - 1$ . ■

## 4.3 Preuve de la condition de voisinage large, par des inégalités de somme d'ensembles

Notre objectif est de prouver dans notre cas les conditions suffisantes qui apparaissent dans le Théorème 1, et donc dans la Définition 1. Dans le cas d'un tore, cette relation est un problème difficile et étroitement lié à la théorie des nombres et la combinatoire additive. Afin de prouver les conditions (3) et (4) nous utilisons le théorème suivant dû à Kneser (voir par ex. [TV09]).

**Proposition 1 (Théorème de Kneser)** Soit  $G$  un groupe abélien fini non trivial,  $A$  et  $B$  des sous-ensembles non vides finis :

$$|A \oplus B| \geq |A \oplus H| + |B \oplus H| - |H| \quad (5)$$

où  $H \triangleq \{h \in G : x + h \in A \oplus B, \forall x \in (A \oplus B)\}$  est un sous-groupe de  $G$  et il est appelé stabilisateur.

Pour notre cas, si les deux  $n_x$  et  $n_y$  sont premiers (égaux ou non), nous montrons les propriétés désirées :

**Théorème 2** Soit  $n_x$  et  $n_y$  premiers,  $A$  un sous-ensemble non vide de  $G$ , et  $R$  défini par (2). Alors

$$|A \oplus R| \geq |A| + |R| - 1 \quad \text{ou} \quad A \oplus R = G. \quad (6)$$

**Preuve :** Nous considérons le théorème de Kneser (5) avec  $B = R$  :

$$|A \oplus R| \geq |A \oplus H| + |R \oplus H| - |H|. \quad (7)$$

$H$  est un sous-groupe de  $G$  et les sous-groupes de  $G$  sont :  $\{0\}$ ,  $G$ ,  $\{(x, 0) : x \in \frac{\mathbb{Z}}{n_y \mathbb{Z}}\}$  et  $\{(0, y) : y \in \frac{\mathbb{Z}}{n_x \mathbb{Z}}\}$ .

• Cas  $H = \{0\}$  : nous obtenons  $|A \oplus R| \geq |A \oplus \{0\}| + |R \oplus \{0\}| - |\{0\}| \geq |A| + |R| - 1$  (cqfd).

• Cas  $H = \{(x, 0) : x \in \frac{\mathbb{Z}}{n_y \mathbb{Z}}\}$  (ou  $H = \{(0, y) : y \in \frac{\mathbb{Z}}{n_x \mathbb{Z}}\}$ ) : nous constatons que

$$|A \oplus H| \geq |A|. \quad (8)$$

C'est facile à voir puisque  $\mathbf{0} \in H$  implique que  $A \oplus \{\mathbf{0}\} \subset A \oplus H$  qui nous donne  $A \subset A \oplus H$ .

Nous concentrons notre attention sur  $|R \oplus H|$ . Puisque nous sommes dans un tore, la somme de Minkowski d'une ligne horizontale  $H$  et  $R$  est donnée par un rectangle (voir Figure 2), dont la hauteur est le diamètre de  $R$  égal à  $2r + 1$  et la largeur est la longueur de la ligne  $H$ . Nous considérons le bord supérieur du rectangle

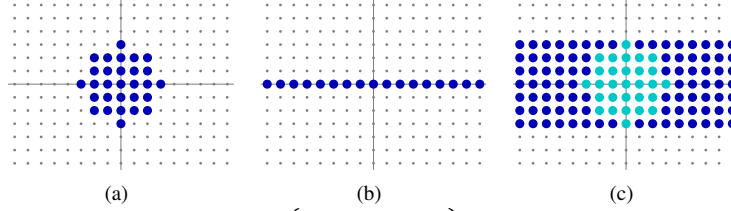


FIGURE 2: (a)  $R$  pour  $r = 3$ ; (b)  $H = \{(x, 0) : x \in \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}\}$ ; (c) Somme de Minkowski de  $R$  et  $H$ .

qui est donné par une ligne horizontale que l'on note  $L' = \{(x, y) \in G : y = r\}$  ayant la même longueur que la ligne  $H$  :  $|L'| = |H|$ . Par les définitions de la somme de Minkowski et de  $R$ , cette ligne passe par le point unique de coordonnées  $(0, r)$ . Nous observons que  $(L' \setminus \{(0, r)\}) \cap R = \emptyset$  et  $(L' \setminus \{(0, r)\}) \cup R \subseteq R \oplus H$ . Cela signifie que

$$|R \oplus H| \geq |L' \setminus \{(0, r)\} \cup R| = |L'| - 1 + |R| - |L' \setminus \{(0, r)\} \cap R| = |H| + |R| - 1. \quad (9)$$

Alors considérant les équations (7), (8) et (9), nous avons :

$$|A \oplus R| \geq |A \oplus H| + |R \oplus H| - |H| \geq |A| + |R| + |H| - 1 - |H| = |A| + |R| - 1. \quad (10)$$

• Cas  $H = G$  : si le stabilisateur est  $G$ , par définition nous avons que  $(A \oplus R) \oplus G = A \oplus R$ . Cela implique que  $|A \oplus R| = |(A \oplus R) \oplus G| \geq |G|$  car  $G \subset (A \oplus R) \oplus G$ . Donc  $A \oplus R = G$ . ■

## 5 Implications, Conclusion et Perspectives

En combinant les résultats précédents, dans le type de réseau choisi, nous avons prouvé que la capacité maximale de la source est égale au nombre de voisins. Regardons un noeud (qui ne soit pas voisin de la source) : il va recevoir en moyenne  $M$  paquets codés par unité de temps. Notre résultat implique que, de fait, en moyenne, il va recevoir aussi  $M$  paquets codés *innovants* (qui apportent de nouvelles informations) par unité de temps. Symétriquement cela signifie que (hors source), en moyenne chaque transmission va être innovante pour chaque récepteur. Et de fait elle est aussi efficace en énergie (impossible de mieux faire). C'est une conséquence forte qui n'est pas vraie en général [CAJ07], mais découle directement de l'homogénéité du réseau (ceci étend le cas [ACJ07] où beaucoup de sources sont sur le bord du réseau).

En conclusion, dans cet article, nous avons étudié la méthode du codage réseau appliquée au cas de diffusion d'information dans les réseaux sans fil. Nous avons fourni la capacité maximale de diffusion pour de tels réseaux (modélisées par des hypergraphes), organisés en grilles toriques. Nos résultats ont été obtenus en déterminant la coupe minimale pour ce type de graphes. Les perspectives pour la suite consistent à étendre les résultats au cas de grilles infinies et trouver des bornes théoriques, du point de vue de la théorie de l'information, relatifs à la quantité d'information transmise dans ce type de réseau.

## Références

- [ACJ07] Cedric Adjih, Song Yean Cho, and Philippe Jacquet. Near optimal broadcast with network coding in large sensor networks. *CoRR*, abs/0708.0975, 2007.
- [ACLY00] Rudolf Ahlswede, Ning Cai, Shuo-yen Robert Li, and Raymond W. Yeung. Network information flow. *IEEE Transactions on Information Theory*, 46(4) :1204–1216, 2000.
- [CAJ07] Song Yean Cho, Cedric Adjih, and Philippe Jacquet. Heuristics for network coding in wireless networks. *CoRR*, abs/0706.4175, 2007.
- [DEH<sup>+</sup>05] Supratim Deb, Michelle Effros, Tracey Ho, David R. Karger, Ralf Koetter, Desmond S. Lun, Muriel Medard, and Niranjan Ratnakar. Network coding for wireless applications : A brief tutorial. In *International Workshop on Wireless Ad-hoc Networks (IWWAN)*, 2005.
- [LRM<sup>+</sup>06] D. S. Lun, N. Ratnakar, M. Medard, R. Koetter, D. R. Karger, T. Ho, E. Ahmed, and Fang Zhao. Minimum-cost multicast over coded packet networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 52(6) :2608–2623, 2006.
- [TV09] T. Tao and V.H. Vu. *Additive Combinatorics*. Cambridge Studies in Adv. Math. Cambridge University Press, 2009.